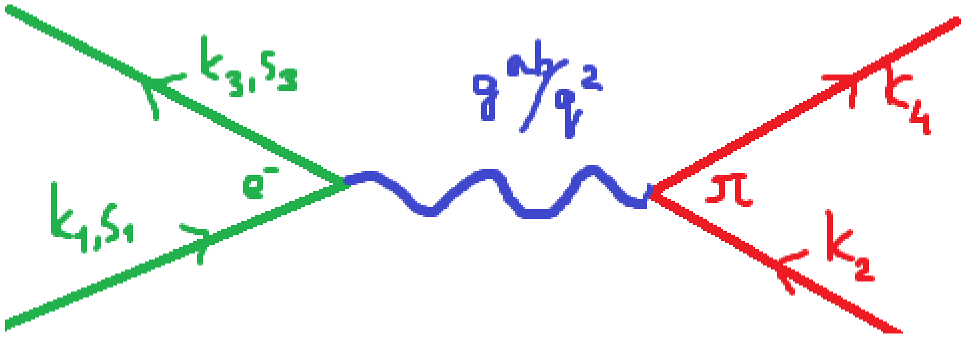
Никитин студентке: Глядя на вашу красивую тетрадь с прописанными задачами, я представляю, как она выкладывается для последующих поколений… Страшный сон!

В первой методичке КЭД1 мы смотрели пион-пионную реакцию. Пионы – скалярные частицы, т.е. частицы без спина. Расчёт процессов для них наиболее прост. Но, как мы знаем, большинство частиц спин-таки имеют. Это приводит нас к невероятно противной процедуре суммирования-усреднения по спину. Познакомимся с ней.

Рассмотрим процесс – $e^-\pi^- \to e^-\pi^-$. Диаграмма Фейнмана:



Вася Пупкин нам подсчитал М-матричный элемент:

$$M_{fi} = \frac{2ie^2}{t}\bar{v}(3)\widehat{k_4}u(1)$$

ВЫВОД M_{fi} – В СЛЕДУЮЩЕЙ МЕТОДИЧКЕ, А В ЭТОЙ – ПОЛЬЗУЕМСЯ КАК ГОТОВЫМИ РЕЗАМИ.

Вообще нужно писать $\bar{v}(\boldsymbol{k_3}, s_3)\widehat{k_4}u(\boldsymbol{k_1}, s_1)$, но я буду использовать более краткое обозначение.

Нам нужно подсчитать $|M_{fi}|^2$, из чего мы сразу получим сечение по формулам из «кинематических изысков»:

$$d\sigma(s,t) = \frac{|M_{fi}(s,t)|^2}{64\pi((s-m_1^2-m_2^2)^2 - m_1^2m_2^2}dt$$

$$\sigma(s) = \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} \frac{d\sigma(s,t)}{dt}dt$$

$$t_{\text{мин}} = m_1^2 + m_3^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_1^2,m_2^2) + m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_3^2,m_4^2) + m_3^2} + \frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_1^2 + m_3^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_1^2,m_2^2) + m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_3^2,m_4^2) + m_3^2} - \frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

$$\lambda(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$

Сопряжённый М-матричный элемент:

$$M_{fi}^* = \frac{2ie^2}{t}\bar{u}(1)\widehat{p_1}v(3)$$

Но какое же будет ваше удивление, когда вы узнаете, что $|M_{fi}|^2$ на самом деле не $\frac{4e^2}{s^2}\bar{v}(2)\widehat{k_4}u(1)\bar{u}(1)\widehat{k_4}v(3)$, а вот это чудовище:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{e^4}{t^2}\sum_{s_1,s_2}\bar{v}(3)\widehat{k_4}u(1) * \bar{u}(1)\widehat{k_4}v(3)$$

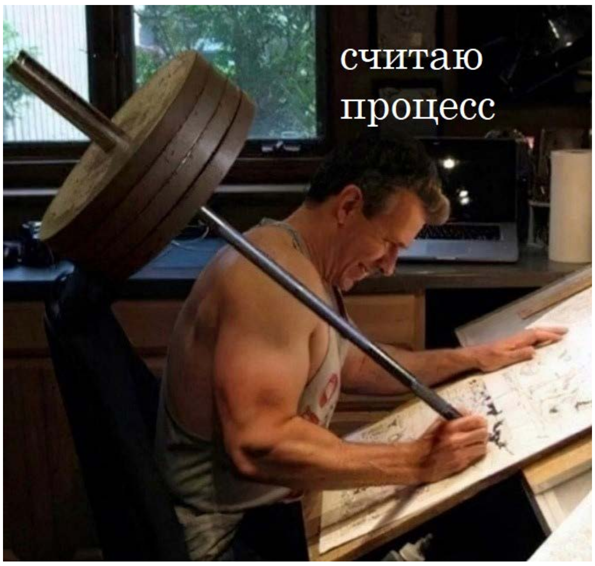
Что же пошло не так?

А дело в том, что электрон – частица спинорная, имеющая спин.

Необходимо выполнить усреднение по спинам двух электронов s_1 и s_2 - если только пучки электронов не поляризованы, что бывает крайне редко. Поэтому и, в частности, пропадает 4 в коэфе – из-за двух усреднений.

Когда у нас были пионы, они были частицами скалярными, у которых спина не было. И там такой шняги, разумеется не было. А сейчас потребуется ☹

Запасайтесь попкорном, мы тут надолго.



Хорошо, а как усреднять? Тут нужна целая техника! Объясняю, как.

Есть такое тождество:

$$\sum_s \bar{u}(\text{частицы})\, u(\text{частицы}) = (\widehat{k_{\text{частицы}}} + I * m_{\text{частицы}})$$

Стоп-машина! А что такое $\hat{k}$? Это ни в коем случае не оператор – 4-импульс и 4-волновой вектор и так операторы, просто крышечки мы не пишем с самого начала.

(и Никитин тоже не пишет)

Это на самом деле вот такая вот шняга: $\hat{k} = \sum_a \gamma^a k_a$. Это на самом деле матрица. Крышечками у нас обычно обозначаются операторы, которые иногда матрицы, так что обозначение не на пустом месте родилось.

Упражнение. 4-вектор k равен {1, -2, 0, 4} (в каких-то там единицах). Найти явный вид $\hat{k}$.

Решение:

$$\hat{k} = \gamma^0 k_0 + \gamma^1 k_1 + \gamma^2 k_2 + \gamma^3 k_3 = \gamma^0 + 2\gamma^1 - 4\gamma^3$$
$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2\sigma_1 - 4\sigma_3 \\ 4\sigma_3 - 2\sigma_1 & -I \end{pmatrix}$$

С вашего позволения, я всё это проделал в блочном виде.

Заметьте, что именно $\gamma^0 + 2\gamma^1 - 4\gamma^3$, а не $\gamma^0 - 2\gamma^1 + 4\gamma^3$ – потому что в формуле $\hat{k} = \sum_a \gamma^a k_a$ ко-вектор, т.е. вектор с нижним индексом. Пришлось опустить.

Отступление про $\hat{k}$ считаю завершённым!

Итак, было:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{e^4}{t^2} \sum_{s_1, s_2} \bar{v}(3)\widehat{k_4}u(1) * \bar{u}(1)\widehat{k_4}v(3)$$

Правило: если

$$|M_{fi}|^2 = C * \sum_{s_1, s_2} \bar{v}(N_2)\hat{A}u(N_1) * \bar{u}(N_1)\hat{B}v(N_2)$$

Где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ какие-то операторы, то в результате суммирования получим:

$$|M_{fi}|^2 = C * Sp\left(\hat{A}(\hat{k}_{N_1} + I * m_{N_1})\hat{B}(\hat{k}_{N_1} - I * m_{N_2})\right)$$

Sp – след матрицы. Он же может обозначаться как Tr. Sp немецкое обозначение, Tr английское. Т.к. англосаксы плохие, будем использовать немецкое обозначение. Никитин делает так же.
Применяем правило:

$$\left|M_{fi}\right|^2 = \frac{e^4}{s^2} Sp\left(\hat{k}_4(\hat{k}_1 + Im)\hat{k}_4(\hat{k}_3 - Im)\right)$$

Скобочки раскрываем:

$$\left|M_{fi}\right|^2 = \frac{e^4}{s^2} Sp\left((\hat{k}_4\widehat{k_1} + m\hat{k}_4)(\hat{k}_4\hat{k}_3 - m\hat{k}_4)\right)$$

А если мы продолжим раскрывать скобки, то у нас там будет «разность квадратов и останется лишь:

$$\left|M_{fi}\right|^2 = \frac{e^4}{s^2} Sp\left(\hat{k}_4\widehat{k_1}\hat{k}_4\hat{k}_3 - m^2\hat{k}_4\hat{k}_4\right)$$

Что дальше? А дальше мы пользуемся ультра-формулами из задачи 38, которую предлагает Никитин в своём курсе:

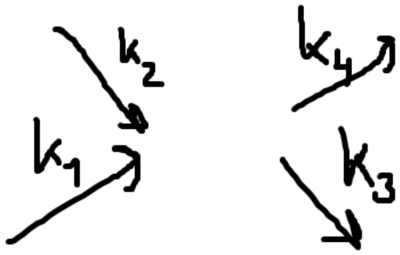
$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\,\left(\hat{a}\,\hat{b}\right) = 4\,(ab), \\ &\mathrm{Sp}\,\left(\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{d}\right) = 4\Big((ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)\Big) \end{aligned}}$$

Всё, разваливаем шпур на сумму двух шпуров и получаем:

$$\left|M_{fi}\right|^2 = \frac{4e^4}{t^2}\left((\boldsymbol{k_4k_1})(\boldsymbol{k_4k_3}) - \boldsymbol{k_4^2}(\boldsymbol{k_1k_3}) + (\boldsymbol{k_4k_3})(\boldsymbol{k_1k_4}) - m^2 * \boldsymbol{k_4^2}\right)$$
$$= \frac{e^4}{t^2}\left(2(\boldsymbol{k_4k_1})(\boldsymbol{k_4k_3}) - \boldsymbol{k_4^2}(\boldsymbol{k_1k_3}) - m^2 * \boldsymbol{k_4^2}\right)$$

Всё, получили лоренц-инвариантную величину. Напомню, что псевдоскалярное произведение 4-векторов – конечно, лоренц-инвариантный скаляр. Только их бы выразить через s,t,u. Показываю, как это делается. Причём проделаем это в общем случае, чтобы потом готовые формулы были у вас под рукой.

Давайте вспомним переменные Мандельстама:



Тогда

$$s = (\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2})^2 = (\boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{k_4})^2$$
$$t = (\boldsymbol{k_3} - \boldsymbol{k_1})^2 = (\boldsymbol{k_4} - \boldsymbol{k_2})^2$$

$$u = (\boldsymbol{k_4} - \boldsymbol{k_1})^2 = (\boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k_3})^2$$

Поэтому

$$s = \boldsymbol{k_1^2} + \boldsymbol{k_2^2} + 2(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_2}) = \boldsymbol{k_3^2} + \boldsymbol{k_4^2} + 2(\boldsymbol{k_3}\boldsymbol{k_4})$$
$$t = \boldsymbol{k_3^2} + \boldsymbol{k_2^2} - 2(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_3}) = \boldsymbol{k_2^2} + \boldsymbol{k_4^2} - 2(\boldsymbol{k_2}\boldsymbol{k_4})$$
$$u = \boldsymbol{k_1^2} + \boldsymbol{k_4^2} - 2(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_4}) = \boldsymbol{k_2^2} + \boldsymbol{k_3^2} - 2(\boldsymbol{k_2}\boldsymbol{k_3})$$

Вспомним, что $\boldsymbol{k_i^2} = m_i^2$. Получаем

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_2}) = m_3^2 + m_4^2 + 2(\boldsymbol{k_3}\boldsymbol{k_4})$$
$$t = m_3^2 + m_2^2 - 2(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_3}) = m_2^2 + m_4^2 - 2(\boldsymbol{k_2}\boldsymbol{k_4})$$
$$u = m_1^2 + m_4^2 - 2(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_4}) = m_2^2 + m_3^2 - 2(\boldsymbol{k_2}\boldsymbol{k_3})$$

И получаем готовые формулы для шести скалярных произведений:

$$\boxed{\begin{gathered}
(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_2}) = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2} \\
(\boldsymbol{k_3}\boldsymbol{k_4}) = \frac{s - m_3^2 - m_4^2}{2} \\
(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_3}) = \frac{m_1^2 + m_3^2 - t}{2} \\
(\boldsymbol{k_2}\boldsymbol{k_4}) = \frac{m_2^2 + m_4^2 - t}{2} \\
(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_4}) = \frac{m_1^2 + m_4^2 - u}{2} \\
(\boldsymbol{k_2}\boldsymbol{k_3}) = \frac{m_2^2 + m_3^2 - u}{2}
\end{gathered}}$$

Сделаем замены:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{4e^4}{t^2}\left(2(\boldsymbol{k_4}\boldsymbol{k_1})(\boldsymbol{k_4}\boldsymbol{k_3}) - \boldsymbol{k_4^2}(\boldsymbol{k_1}\boldsymbol{k_3}) - m_e^2 * 4\boldsymbol{k_4^2}\right)$$

Подставляем готовые формулы:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{4e^4}{t^2}\left(2\left(\frac{m_1^2 + m_4^2 - u}{2}\right)\left(\frac{s - m_3^2 - m_4^2}{2}\right) - m_4^2\left(\frac{m_1^2 + m_3^2 - t}{2}\right) - {m_e}^2 * m_4^2\right)$$

Теперь, применительно к нашей задаче

$$m_1^2 = m_3^2 = m_e^2;\ m_2^2 = m_4^2 = m_\pi^2;$$

$$|M_{fi}|^2 = \frac{4e^4}{s^2}\left(2\left(\frac{m_e^2 + m_\pi^2 - u}{2}\right)\left(\frac{s - m_e^2 - m_\pi^2}{2}\right) - m_\pi^2\left(\frac{m_e^2 + m_e^2 - t}{2}\right) - m_e^2 * m_\pi^2\right)$$
$$= \frac{2e^4}{s^2}\left((m_e^2 + m_\pi^2 - u)(s - m_e^2 - m_\pi^2) - m_\pi^2(2m_e^2 - t) - 2m_e^2 * m_\pi^2\right)$$
$$= \frac{2e^4}{s^2}\left((m_e^2 + m_\pi^2)(s - u) + tm_\pi^2 - 4m_e^2 * m_\pi^2\right)$$

Ну, собственно, ура – мы получили $|M_{fi}|^2$ как лоренц-инвариантную величину.

Далее уже досчитываем сечение по формуле из «кинематических изысков».